非加法的周辺測度をもつ歪直積の連続性とコンパクト性 (非加法性の数理と情報 : 非加法性と凸解析)

河邊, 淳

数理解析研究所講究録
第1630巻 2009年 64-69

非加法的周辺測度をもつ歪直積の連続性とコンパクト性

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. X, Y は空でない集合, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ はそれぞれ X, Y の部分集合からなる集合体とする. 与えられた $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ 上の非加法的測度 μ, ν に対して, それらを周辺測度にもつ直積集合体 $\mathcal{E}\times\mathcal{F}$ 上の非加法的歪直積 λ は一様自己連続と仮定する. このとき, μ が連続で ν がコンパクトならば λ は連続となる. 歪直積 λ のコンパクト性に関しても同様の結果が成り立つ.

1. 序論

以下では, X, Y は空でない集合, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ はそれぞれ X, Y の部分集合からなる集合体とする. また, 直積集合 $X\times Y$ の可測長方形 $E\times F$ $(E\in\mathcal{E}, F\in\mathcal{F})$ 全体から生成される集合体を $\mathcal{D}$ で表す. 集合関数 $\mu:\mathcal{E}\to\mathbb{R}^+$, $\nu:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^+$, $\lambda:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^+$ に対して, すべての $E\in\mathcal{E}$, $F\in\mathcal{F}$ で, $\lambda(E\times Y)=\mu(E)$ かつ $\lambda(X\times F)=\nu(F)$ が成り立つとき, λ は μ と ν の歪直積 (indirect product) という. 1953年に Marczewski と Ryll-Nardzewski [7, 9] は, μ, ν, λ が有限加法的な場合に, 歪直積の連続性 (すなわち, 可算加法性) とコンパクト性に関して次の結果を与えた.

(I) μ が連続で ν がコンパクトならば λ は連続.

(II) μ と ν がともにコンパクトならば λ もコンパクト.

彼らの結果 (以下では, 簡単のために M-RN 定理と呼ぶ) は, 直積空間上の測度の連続性やコンパクト性は, その各因子空間上への射影測度のもつ性質で決定されることを意味し, 測度論における基本定理として極めて重要であるのみならず, 多くの応用をもつ. 例えば, 与えられた周辺測度と台をもつ直積空間上の測度の存在性に関する Strassen の定理 [11] は, M-RN 定理を用いて示される. この報告集では, M-RN 定理 (I) と (II) が, 非加法的測度論の枠組みではどのような形で定式化されるかを報告する.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28A35; Secondary 28A12, 28C15.
Key words and phrases. non-additive measure; indirect product measure; compact measure; uniform autocontinuity; weak aysmptotic null-additivity.
*Research supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 20540163, Japan Society for the Promotion of Sciences (JSPS).

第2章では，非加法的測度の零加法性や弱零加法性の概念を漸近化した，漸近零加法性や弱漸近零加法性の概念を導入し，それらは，測度が定義された集合体を，その集合体に属する集合の可算積全体からなるより広い集合族に拡大して得られる測度の零加法性，弱零加法性で特徴付けられることを述べる．漸近零加法性の概念は，測度の連続性に関する Alexandroff 定理を非加法化する際に利用される．一方，弱漸近零加法性の概念は，M-RN 定理 (II) を定式化する際に用いられる．第3章では，M-RN 定理 (I) は，直積集合体上の一様自己連続な非加法的歪直積測度に対して成立すること，一方，M-RN 定理 (II) は，一様自己連続性より弱い条件である弱漸近零加法性を仮定するだけで成立することを報告する．

この論文は，既に公表された論文 [6] の要約であり，証明などは原論文を参照していただきたい．

2. 準備

この章では，非加法的測度に関する定義や基本性質をまとめる．以下では，$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^+$，$\mathbb{N}$ で，実数全体，非負実数全体，自然数全体を表す．また，X は空でない集合，$\mathcal{F}$ は X の部分集合からなる集合体とする．

定義 2.1. 集合関数 $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ は

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A, B \in \mathcal{E}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \le \mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき，**非加法的測度** (non-additive measure) という．

非加法的測度論で頻繁に用いられる基本概念を以下でまとめる．非加法的測度に関するさらなる情報を得るには，例えば [2, 10, 12] を見よ．

定義 2.2. 非加法的測度 $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ は

(1) $A_n \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \ldots), A \in \mathcal{E}$ で $A_n \downarrow A$ ならば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ を満たすとき，**上から連続** (continuous from above) という．

(2) $A_n \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \ldots), A \in \mathcal{E}$ で $A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ を満たすとき，**下から連続** (continuous from below) という．

(3) 上および下から連続なとき，単に**連続** (continuous) という．連続な非加法的測度のことを**ファジィ測度** (fuzzy measure) と呼ぶことがある．

(4) (1) が $A = \emptyset$ に対して成り立つとき，すなわち $A_n \in \mathcal{E}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で $A_n \downarrow \emptyset$ ならば $\mu(A_n) \downarrow 0$ を満たすとき，**順序連続** (order continuous) という．

(5) $A, B \in \mathcal{E}$ で $\mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ となるとき，**零加法的** (null-additive) という．

(6) $A, B \in \mathcal{E}$ で $\mu(A) = \mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = 0$ となるとき，**弱零加法的** (weakly null-additive) という．

(7) 任意の$A \in \mathcal{E}$と$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$に対して，$\mu(B_n) \to 0$ならば$\mu(A \cup B_n) \to \mu(A)$となるとき，**上から自己連続** (autocontinuous from above) という.

(8) 任意の$A \in \mathcal{E}$と$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$に対して，$\mu(B_n) \to 0$ならば$\mu(A \setminus B_n) \to \mu(A)$となるとき，**下から自己連続** (autocontinuous from below) という.

(9) 上および下から自己連続なとき，単に**自己連続** (autocontinuous) という.

(10) 任意の$\varepsilon > 0$に対して，$\delta > 0$が存在して，任意の$A, B \in \mathcal{E}$に対して，$\mu(B) < \delta$ならば$\mu(A \cup B) < \mu(A) + \varepsilon$となるとき，**上から一様自己連続** (uniformly autocontinuous from above) という.

(11) 任意の$\varepsilon > 0$に対して，$\delta > 0$が存在して，任意の$A, B \in \mathcal{E}$に対して，$\mu(B) < \delta$ならば$\mu(A \setminus B) > \mu(A) + \varepsilon$となるとき，**下から一様自己連続** (uniformly autocontinuous from below) という.

(12) 上および下から一様自己連続なとき，単に**一様自己連続** (uniformly autocontinuous) という.

(13) 任意の$\varepsilon > 0$に対して，$\delta > 0$が存在して，任意の$A, B \in \mathcal{E}$に対して，$\max(\mu(A), \mu(B)) < \delta$ならば$\mu(A \cup B) < \varepsilon$となるとき，**pseudometric generating property** (単に，p.g.p.) をもつという.

(14) 互いに素な集合からなる任意の集合列$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$に対して，$\mu(A_n) \to 0$となるとき，**網羅的** (exhaustive) という.

この論文では，零加法性や弱零加法性を漸近化した概念が必要となる.

定義 2.3. 非加法的測度$\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$は

(1) 任意の$A \in \mathcal{E}$と任意の単調減少な$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$に対して，$\mu(A \cup B_n) \downarrow \mu(A)$となるとき，**漸近零加法的** (asymptotic null-additive) という.

(2) 任意の単調減少な$\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$と$\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$に対して，$\mu(A_n \cup B_n) \downarrow 0$となるとき，**弱漸近零加法的** (weakly asymptotic null-additive) という.

Xの部分集合からなる集合族$\mathcal{C}$に対して，$\mathcal{C}$に属する集合の可算積全体からなる集合族を$\mathcal{C}_\delta$で表す．次に述べる非加法的測度の拡張定理は [12, Theorem 4.5] で与えられた.

定理 2.4. 非加法的測度$\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$は上から連続とする．このとき，$\mu$は上から連続な非加法的測度$\mu^* : \mathcal{E}_\delta \to \mathbb{R}^+$に一意的に拡張可能．実際，各$A \in \mathcal{E}_\delta$に対して，$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) : A \subset B \in \mathcal{E}\}$と置けばよい.

非加法的測度μの漸近零加法性や弱漸近零加法性は，拡張されたμ^*の零加法性や弱零加法性で特徴付けられる.

命題 2.5. 非加法的測度$\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$は上から連続とし，$\mu^* : \mathcal{E}_\delta \to \mathbb{R}^+$は定理 2.4 で与えられた$\mu$の拡張測度とする．このとき以下が成り立つ.

(1) μ は弱漸近零加法的 $\Leftrightarrow$ μ^* は弱零加法的
(2) μ は漸近零加法的 $\Leftrightarrow$ μ^* は零加法的

非加法的測度に関する種々の定義の間には，以下の関係が成り立つ．

命題 2.6. $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ は非加法的測度とする．

(1) μ に関して以下の主張が成り立つ．
- 一様自己連続 $\Leftrightarrow$ 上から一様自己連続 $\Leftrightarrow$ 下から一様自己連続
- 上から一様自己連続 $\Rightarrow$ p.g.p. をもつ $\Rightarrow$ 弱漸近零加法的 $\Rightarrow$ 弱零加法的
- 上から一様自己連続 $\Rightarrow$ 上から自己連続 $\Rightarrow$ 漸近零加法的 $\Rightarrow$ 零加法的
- 漸近零加法的 $\Rightarrow$ 弱漸近零加法的

(2) μ は上から連続で，$\mathcal{E}$ は可算積に関して閉じているとする．このとき，以下の主張が成り立つ．
- μ は漸近零加法的 $\Leftrightarrow$ μ は零加法的
- μ は弱漸近零加法的 $\Leftrightarrow$ μ は弱零加法的

(3) 順序連続かつ漸近零加法的な非加法的測度は，つねに上から連続となる．

(4) すべての歪測度 (distorted measure)，すなわち，劣加法的測度 $m : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ と $f(0) = 0$ を満たす狭義単調増加な連続関数 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ を用いて，$\mu := f \circ m$ の形で与えられる $\mathcal{E}$ 上の非加法的測度 μ は一様自己連続である．例えば，$X := [0, 3]$，m を X 上の Lebesgue 測度，$f(x) := \sqrt{x}\ (x \in [0, 1]); x^2\ (x \in (1, 3])$ とすると，歪測度 $\mu := f \circ m$ は優加法性も劣加法性も満たさない一様自己連続な非加法的測度となる．

Marczewski と Ryll-Nardzewski [7, 8] によって導入された測度のコンパクト性は，基礎空間 X に位相構造を仮定しない一般的な枠組みで，測度の正則性 (Radon 性) を議論する際に重要な概念である．

定義 2.7. $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ は非加法的測度とする．

(1) X の部分集合からなる空でない族 $\mathcal{K}$ は，任意の集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{K}$ に対して，$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$ ならば，適当な $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$\bigcap_{n=1}^{n_0} K_n = \emptyset$ となるとき，**コンパクト** (compact) という．

(2) コンパクト集合族 $\mathcal{K}$ が存在して，任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して，適当な集合列 $\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{K}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{E}$ を選べば，$B_n \subset K_n \subset A\ (n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\mu(A \setminus B_n) \to 0$ となるとき，μ は**コンパクト** (compact) という．

注意 2.8. (1) Hausdorff 空間のコンパクト部分集合全体からなる族はコンパクト．

(2) [7, 2-(i),(ii),(iii)] により，上の定義の (2) において，コンパクト集合族 $\mathcal{K}$ は，空集合を含み，有限和と有限積に関して閉じているように，また，$\{K_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は単調増加な集合列として選べる．

コンパクトな有限加法的測度はつねに連続となることを主張する有名な Alexandroff の定理 [1] は，非加法的測度論では以下のように定式化される．

命題 2.9. コンパクトかつ漸近零加法的な非加法的測度は，つねに上から連続である．

系 2.10. コンパクトかつ自己連続な非加法的測度は，つねに連続である．

Alexandroff 定理の Riesz 空間値非加法的測度への拡張に関しては，[4, 5] を見よ．

3. 歪直積測度の連続性とコンパクト性

以下では，X，Y は空でない集合，$\mathcal{E}$，$\mathcal{F}$ はそれぞれ X，Y の部分集合からなる集合体とする．また，直積集合 $X \times Y$ の可測長方形 $E \times F$ $(E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F})$ 全体から生成される集合体を $\mathcal{D}$ で表す．$X \times Y$ の部分集合 C と $x \in X$ に対して，C の x-切片および水平射影を，それぞれ $C(x) := \{y \in Y : (x,y) \in C\}$ と $\pi[C] := \{x \in X : \exists y \in Y, (x,y) \in C\}$ で表す．

定義 3.1. $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$，$\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$，$\lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ は非加法的測度とする．すべての $E \in \mathcal{E}$，$F \in \mathcal{F}$ に対して，$\lambda(E \times Y) = \mu(E)$ かつ $\lambda(X \times F) = \nu(F)$ が成り立つとき，λ は μ と ν の**歪直積** (indirect product) という．

注意 3.2. 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して，$\pi[C] \in \mathcal{E}$ かつ $\lambda(C) \leq \mu(\pi[C])$ が成り立つ．

この講演概要の冒頭で述べた M-RN 定理 (I) は，非加法的測度論の枠組みでは次のように定式化される．

定理 3.3. $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ と $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ は非加法的測度とする．$\lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ は μ と ν の歪直積で，一様自己連続とする．μ が順序連続で ν がコンパクトならば λ は連続．

注意 3.4. μ，ν は連続であるが，λ は連続とはならない有限加法的な測度 μ，ν と，それらの歪直積 λ が存在する [9, 1-(ii)]．

Dobrakov [3] によって与えられた非加法的測度に対する Hopf 型の拡張定理と，定理 3.3 を組み合わせれば，歪直積の拡張定理として次の結果を得る．

定理 3.5. $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ と $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ は非加法的測度とする．$\lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ は μ と ν の歪直積とする．μ は順序連続で ν はコンパクトとする．次の条件は同値．

(i) λ は一様自己連続かつ網羅的．

(ii) λ は $\mathcal{D}$ によって生成される σ-集合体上の一様自己連続かつ連続な非加法的測度に一意的に拡張可能．

一方，M-RN 定理 (II) は，λ に一様自己連続性より弱い条件である弱漸近零加法性を仮定するだけで定式化できる．

定理 3.6. $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ と $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ は非加法的測度とする．$\lambda : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ は μ と ν の歪直積で，弱漸近零加法的とする．μ と ν がともにコンパクトならば λ もコンパクト．

参考文献

[1] A.D. Alexandroff, Additive set-functions in abstract spaces, Mat. Sb. N.S. 9 (51) (1941) 563–628.

[2] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[3] I. Dobrakov, On submeasures I, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 112 (1974) 1–35.

[4] J. Kawabe, Regularity and Lusin's theorem for Riesz space-valued fuzzy measures, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 895–903.

[5] J. Kawabe, The Alexandroff theorem for Riesz space-valued non-additive measures, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 2413–2421.

[6] J. Kawabe, Continuity and compactness of the indirect product of two non-additive measures, Fuzzy Sets and Systems (2008), doi: 10.1016/j.fss.2008.08.008.

[7] E. Marczewski, On compact measures, Fund. Math. 40 (1953) 113–124.

[8] E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, Projections in abstract sets, Fund. Math. 40 (1953) 160–164.

[9] E. Marczewski and C. Ryll-Nardzewski, Remarks on the compactness and nondirect products of measures, Fund. Math. 40 (1953) 165–170.

[10] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[11] V. Strassen, The existence of probability measures with given marginals, Ann. Math. Stat. 36 (1965) 423–439.

[12] Z. Wang and G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York, 1992.